# ALGEBRAISCHE STRUKTUREN

ÜBUNGSBLATT 2

1. Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Auf der Menge $G^n = G \times \ldots \times G$ definieren wir die Operation

$$\cdot : G^n \times G^n \to G^n \text{ durch } (x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1,\ldots,y_n) = (x_1y_1,\ldots,x_ny_n).$$

Man zeige, dass $(G^n,\cdot)$ eine Gruppe ist, und sie ist genau dann abelsch wenn so ist $(G,\cdot)$. Man zeige auch dass, die Teilmenge

$$\{(x_1,\ldots,x_n)\in G^n \mid x_1=\ldots=x_n\}$$

eine Untergruppe der Gruppe $(G^n\cdot)$ bildet.

2. Auf der Menge $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ definieren wir eine Operation wie folghlich

$$* : S\times S\to S,\ (x,x')*(y,y') = (xx'-yy', xy'+x'y).$$

Man zeige, dass $(S,*)$ eine abelsche Gruppe ist.

3. Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe, mit dem Neutralelement 1. Gilt $x^2=1$ für alle $x\in G$, so ist $G$ abelsch.

4. Man zeige dass die Gruppen $(\mathbb{R},+)$ und $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ isomorph sind, wobei $\mathbb{R}_+^* = (0,+\infty)$.

5. Man betrachte die Matrizen

$$U=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \text{ und } V=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

Man zeige dass $U,V\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Man bestimme $\langle U\rangle$, $\langle V\rangle$, $\langle UV\rangle$, $\langle U,V\rangle$.

6. Sei $f:G\to H$ ein Gruppenhomomorphismus, und sei $X\subseteq G$. Man zeige, dass $f(\langle X\rangle) = \langle f(X)\rangle$, wobei $f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$.

7. Sei $f:G\to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Sind $G'\le G$ und $H'\le H$, so zeige man, dass $f(G')\le H$ und $f^{-1}(H')\le G$. Hier $f^{-1}(H')=\{x\in G \mid f(x)\in H'\}$.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

*E-mail address*, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`